





TD Matrices

Matrice d'une application linéaire

DU7 Exercice 1   Soient $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ la projection sur $\text{Vect } f_1$ parallèlement à $\text{Vect } f_2$.


1. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(u)$.
2. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, où $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$.

2EU Exercice 2   Soit $E = \mathbb{R}_1[X]$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_1[X])$ défini par $u(P) = 2XP' + P(0)(X + 1)$.

1. Expliciter $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(u)$.
2. Résoudre, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, le système $AX = \lambda X$.
3. Déterminer une base \mathcal{B} de E tq $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale.
4. Écrire une relation entre A et D .

01C Exercice 3 Soit $T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$, u un endomorphisme de E et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = T$.

1. Pour $\lambda \neq 0$ déterminer la matrice de u dans la base $(\lambda e_1, \lambda e_2, \lambda e_3)$.
2. Pour $\lambda \neq 0$ déterminer la matrice de u dans la base $(e_1, \lambda e_2, \lambda^2 e_3)$.
3. Déterminer la matrice de u dans la base (e_3, e_2, e_1) .

S14 Exercice 4  Soit E un \mathbb{R} -ev de dim 2 et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = -\text{Id}_E$. Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E tq $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Indication : Considérer un premier vecteur $x \neq \vec{0}$ quelconque.

91F Exercice 5 On considère $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0\}$.


1. Donner une base \mathcal{B} de E .
2. On considère T l'endomorphisme de E défini par $T((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (u_{n+2})_{n \in \mathbb{N}}$. Déterminer la matrice de T dans la base \mathcal{B} .

04H Exercice 6 Soit E de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Soit $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq \vec{0}_E$. Montrer que $\mathcal{B} = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E et expliciter la forme de la matrice de u dans celle-ci.

Indication : Pour la liberté, écrire une relation de liaison et composer par u^{n-1} .

9RU Exercice 7  Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que $2 \text{rang } f \leq \dim E$.
2. Montrer qu'il existe une famille libre (e_1, \dots, e_r) telle que $\text{Vect}(e_1, \dots, e_r) \oplus \text{Ker } f = E$.
3. Construire une base \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} O & O \\ I_r & O \end{pmatrix}$.

U6N Exercice 8  Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ non nul tel que $u^3 + u = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.

1. Montrer que $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$ et que $\text{Im } u = \text{Ker}(u^2 + \text{id})$.
2. Montrer que si $x \neq \vec{0}$ vérifie $u(x) = \lambda x$, alors $\lambda = 0$.
3. On suppose que u n'est pas inversible. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

M00 Exercice 9 Soit E de dimension finie. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on considère $A = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid v \circ u = u \circ v = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$. Montrer que $\dim A = (\dim \text{Ker } u)^2$.


Ind : Considérer les matrices de u, v dans une (des) base(s) adaptée(s) à un (des) sev judicieux.

Conjugaison et matrices semblables

VLM Exercice 10   EXEMPLE DE DIAGONALISATION On considère la matrice $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 3 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour $X \in \mathbb{R}^n$, $AX = X \Leftrightarrow X \in \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $AX = -2X \Leftrightarrow X \in \text{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Expliciter $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. **Ind.** : Considérer $a : X \mapsto AX$. On a $\text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(a) = A$.
3. Comment trouver une expression explicite de A^n ?

Q4H Exercice 11 DIAGONALISATION On dit que $x \in E$ est un vecteur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ si $x \neq \vec{0}$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $m : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ l'application linéaire associée. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de m si et seulement s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que PMP^{-1} soit diagonale.

GB8 Exercice 12  Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1, et $X \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\text{Im } M = \text{Vect } X$.

1. Montrer que si $MX \neq 0$, M est semblable à une matrice λE_{11} .
Indication : Il s'agit de construire une base de \mathbb{R}^n , dans laquelle la matrice de m est de la forme λE_{11} .
2. Montrer que si $MX = 0$, M est semblable à E_{12} .
3. Montrer que $M^2 = M \text{Tr}(M)$
4. Retrouver ce résultat en justifiant qu'il existe $X, Y \in \mathbb{R}^n$ tels que $M = XY^T$.

GIR Exercice 13 Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} O_n & I_n \\ I_n & O_n \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice diagonale par blocs dont la diagonale est formée de n

blocs $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

X1I Exercice 14 Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} * & \dots & \dots & \dots & * \\ * & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

Trace

LB8 Exercice 15 1. Que dire de la trace d'une projection dans un espace de dimension n ?

2. Que dire de la trace d'une symétrie dans un espace de dimension n ?

YEL Exercice 16 Résoudre l'équation $M + M^T = I_n \operatorname{Tr}(M)$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Indication : Raisonner par condition nécessaire et commencer par déterminer $\operatorname{Tr} M$.

63A Exercice 17 FORMES LINÉAIRES SUR $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Quelle est la dimension de $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$?

2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que $\varphi_A : B \mapsto \operatorname{Tr}(AB)$ appartient à E^* .

3. Montrer que pour $\varphi \in E^*$, il existe une unique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\varphi = \varphi_A$.

4. ★ Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ intersecte $GL_n(\mathbb{K})$.

Indication : Utiliser que toute matrice est équivalente à J_r .

6A0 Exercice 18

1. Déterminer la trace de $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto M^T$

2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, déterminer la trace de $\Phi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto MA + AM$.

PR1 Exercice 19 ★ [CENTRALE] Soit E un \mathbb{R} -ev de dimension $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que pour tout $x \in E$, $(x, u(x))$ est liée. Montrer que u est une homothétie.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de trace nulle.

a) Montrer que A est semblable à une matrice M telle que $m_{11} = 0$.

b) Montrer que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.

3. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer l'équivalence entre (i) : $\operatorname{Tr} A = 0$ et (ii) : $\exists U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A = UV - VU$.

FB0 Exercice 20 ★ Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, $p, u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que p est un projecteur et que $pu + up = u$. Montrer que $\operatorname{tr}(u) = 0$.

BIY Exercice 21 ★ THÉORÈME DE BRAUER Montrer que $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$ sont conjuguées si et seulement si les matrices de permutation M_σ et $M_{\sigma'}$ sont conjuguées.

Indication : En termes de leurs orbites, à quelle condition σ et σ' sont-elles conjuguées ?

Rang et matrices équivalentes

JED Exercice 22 Soient $(a_i)_{1 \leq i \leq n}, (b_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ et $A = (a_i + b_j)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Discuter du rang de A .

ZDE Exercice 23

1. Soit $r < n$. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B + \lambda J_r$ soit inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non inversible. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $B + \lambda A$ soit inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

M1R Exercice 24

1. Discuter, selon $a \in \mathbb{C}$, du rang de $M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

2. Déterminer $\operatorname{Ker} M_a$ et $\operatorname{Im} M_a$.

UR1 Exercice 25 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente, et $B \neq O_N$ commutant avec A . Montrer que $\operatorname{rang}(AB) < \operatorname{rang} B$.

Indication : $\operatorname{Im} B$ est stable par A .

2. Soient A_1, \dots, A_n nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, commutant deux à deux. Montrer que $A_1 \dots A_n = O_n$.

V4H Exercice 26 Soit E de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer le rang de $\varphi : v \mapsto u \circ v$.

I14 Exercice 27 ★ DÉCOMPOSITION LU Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ dont toutes les sous-matrices carrées $(a_{ij})_{i, j \leq p}$ sont inversibles. Montrer que A s'écrit de manière unique comme un produit LU , où L (pour «lower») est une matrice triangulaire inférieure dont tous les coefficients diagonaux valent 1 et U (pour «upper») est une matrice triangulaire supérieure inversible. Vérifier la réciproque.

A3J Exercice 28 ★ LIBERTÉ D'UNE FAMILLE DE FONCTIONS Soit E l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et f_1, \dots, f_n des éléments de E . Montrer que la famille (f_1, \dots, f_n) est libre si et seulement s'il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $(f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ soit inversible.

Q2K Exercice 29 ★ [ORAL ENS] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de même rang telles que $A^2 B = A$. Montrer que $B^2 A = B$.

Matrices par blocs

TEL Exercice 30 Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M est inversible ssi A et B le sont.

2. Montrer que $\operatorname{rang} M = \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B$.

JEL Exercice 31 ★ Soit $N = \begin{pmatrix} M & C \\ B & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $M \in GL_p(\mathbb{K})$ est inversible. Montrer que $\operatorname{rang} M = \operatorname{rang} N$ si et seulement si $D = BM^{-1}C$.

Indication : Se ramener au cas où $C = O$ par une méthode de pivot par blocs.